BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

*№1* *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2014*

**УДК 517.977**

# ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

**Э.А.ГАРАЕВА**[**], **К.Б.МАНСИМОВ**[*,**]

[*]*Бакинский Государственный Университет*

***mansimov@front.ru***

[**]*Институт Кибернетики НАН Азербайджана*

*Рассматривается одна специфическая задача оптимального управления дискретными системами. Доказаны необходимые условия оптимальности первого порядка (дискретный принцип максимума, линеаризованное условие оптимальности, аналог уравнения Эйлера).*

**Ключевые слова:** дискретные системы, формула приращения, дискретный принцип максимума, линеаризованное условие максимума, аналог уравнения Эйлера.

В работах [1, 2] А.И. Москаленко рассмотрел задачи оптимального управления процессами, занимающие как бы промежуточное место между задачами оптимального управления системами с сосредоточенными и с распределенными параметрами и доказал ряд необходимых и достаточных условий оптимальности. В настоящей статье изучается разностный (дискретный) аналог одной из этих задач. Получены различные необходимые условия оптимальности первого порядка.

**Постановка задачи.** Предположим, что управляемый дискретный процесс описывается системой разностных уравнений

$$z(t+1,x)=f\left(t,x,z(t,x),u(t)\right),\ \ t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1-1;\ \ x=x_0,x_0+1,\ldots,x_1, \tag{2.1}$$

с начальным условием

$$z(t_0,x)=y(x),\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,x_1, \tag{2.2}$$

где $y(x)$ $n$-мерная вектор-функция являющаяся решением задачи Коши

$$y(x+1)=g\left(x,y(x),v(x)\right),\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,x_1-1,$$

$$y(x_0)=y_0. \tag{2.3}$$

Здесь $f(t,x,z,u)$ $\left(g(x,y,v)\right)$ – заданная $n$-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $z\,(y)$, $y_0$ – заданный постоянный вектор, $t_0$, $t_1$, $x_0$, $x_1$ – заданы, причем разности $t_1-t_0$ и $x_1-x_0$ – есть натуральные числа, $u(t)\;(v(x))$ – $r$ $(q)$-мерный вектор управляющих воздействий со зна-чениями из заданного непустого, ограниченного множества $U\;\;(V)$, т.е

$$u(t)\in U\subset R^r,\quad t\in T=\{t: t=t_0,t_0+1,...,t_1-1\},$$
$$v(x)\in V\subset R^q,\quad x\in X=\{x: x=x_0,x_0+1,...,x_1-1\}. \tag{2.4}$$

Пару $(u(t),v(x))$ с вышеперечисленными свойствами назовем допустимым управлением, а соответствующий процесс $(u(t),v(x),y(x),z(t,x))$ – допустимым процессом.

На решениях системы (2.1)-(2.3) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$S(u,v)=\varphi_1(y(x_1))+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\varphi_2(x,z(t_1,x)). \tag{2.5}$$

Здесь $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x,z)$– заданные скалярные функции непрерывные по совокупности переменных вместе с $\partial\varphi_1(y)/\partial y$, $\partial\varphi_2(x,z)/\partial z$.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала (2.5), при ограничениях (2.1)-(2.4).

Допустимое управление $(u(t),v(x))$, доставляющий минимум функционалу (2.5) при ограничениях (2.1)-(2.4) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t),v(x),y(x),z(t,x))$ – оптимальным процессом.

Перейдем к выводу необходимых условий оптимальности.

**Вспомогательные факты и основные результаты.** Пусть $(u^o(t),v^o(x))$ фиксированное, а $(\bar u(t)=u^o(t)+\Delta u(t),\,\bar v(x)=v^o(x)+\Delta v(x))$– произвольное допустимые управления.

Через $(y^o(x),z^o(t,x))$, $(\bar y(x)=y^o(x)+\Delta y(x),\,\bar z(t,x)=z^o(t,x)+\Delta z(t,x))$ обозначим соответствующие им решения системы (2.1)-(2.3).

Тогда ясно, что $(\Delta z(t,x),\Delta y(x))$ будет удовлетворять системе

$$\Delta z(t+1,x)=f(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t))-f(t,x,z^o(t,x),u^o(t)), \tag{3.1}$$
$$\Delta z(t_0,x)=\Delta y(x),\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1, \tag{3.2}$$
$$\Delta y(x+1)=g(x,\bar y(x),\bar v(x))-g(x,y^o(x),v^o(x)), \tag{3.3}$$
$$\Delta y(x_0)=0. \tag{3.4}$$

Пусть $\psi^o(t,x)$ и $p^o(t)$ пока неизвестные $n$-мерные вектор-функции. Умножим обе части соотношения (3.1) ((3.3)) слева скалярно на $\psi^o(t,x)$ $(p^o(x))$ и просуммируем полученное тождество по $(t,x)$ $(x)$ от $t_0$

до $t_1-1$ и от $x_0$ до $x_1-1$ (от $x_0$ до $x_1-1$), соответственно. В результате получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{o'}(t,x)\Delta z(t+1,x)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{o'}(t,x)\,f\left(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t)\right)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{o'}(t,x)\,f\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t)\right),\tag{3.5}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p^{o'}(x)\Delta y(x+1)\equiv\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p^{o'}(x)\left[g\left(x,\bar y(x),\bar v(x)\right)-g\left(x,y^o(x),v^o(x)\right)\right].\tag{3.6}$$

Положим по определению

$$H\left(t,x,z,u,\psi^0\right)=\psi^{0'}\,f(t,x,z,u),$$
$$M\left(x,y,v,p^0\right)=p^{0'}\,g(x,y,v).$$

Тогда с учетом тождеств (3.5), (3.6) формула для приращения критерия качества (2.5) записывается в виде

$$\Delta S\left(u^o,v^o\right)=S(\bar u,\bar v)-S\left(u^o,v^o\right)=\varphi_1\left(\bar y(x_1)\right)-\varphi_1\left(y^o(x_1)\right)+$$
$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\varphi_2\left(x,\bar z(t_1,x)\right)-\varphi_2\left(x,z^o(t_1,x)\right)\right]+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{o'}(t_1-1,x)\Delta z(t_1,x)-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{o'}(t_0-1,x)\Delta z(t_0,x)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{o'}(t-1,x)\Delta z(t,x)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H\left(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t),\psi^o(t,x)\right)-H\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\right]+$$
$$+p^{o'}(x_1-1)\Delta y(x_1)-p^{o'}(x_0-1)\Delta y(x_0)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p^{o'}(x-1)\Delta y(x)-\tag{3.7}$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M\left(x,\bar y(x),\bar v(x),p^o(x)\right)-M\left(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\right)\right].$$

Используя формулу Тейлора, из (3.7) получим

$$\Delta S\left(u^o,v^o\right)=\frac{\partial\varphi_1'\left(y^o(x_1)\right)}{\partial y}\Delta y(x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial\varphi_2\left(x,z^o(t_1,x)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1,x)+$$
$$+o_1\left(\left\|\Delta y(x_1)\right\|\right)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_2\left(\left\|\Delta z(t_1,x)\right\|\right)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{o'}(t_1-1,x)\Delta z(t_1,x)-\tag{3.8}$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{o'}(t_0-1,x)\Delta y(x)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{o'}(t-1,x)\Delta z(t,x)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H\left(t,x,z^o(t,x),\bar{u}(t),\psi^o(t,x)\right)-H\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\right]-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\frac{\partial H\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)}{\partial z}\Delta z(t,x)+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial H\left(t,x,z^o(t,x),\bar{u}(t),\psi^o(t,x)\right)}{\partial z}-\frac{\partial H\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)}{\partial z}\right)'\Delta z(t,x)+$$

$$\left.+o_3\left(\left\|\Delta z(t,x)\right\|\right)\right]+p^{o'}(x_1-1)\Delta y(x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p'(x-1)\Delta y(x)$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial M'\left(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\right)}{\partial y}\Delta y(x)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M\left(x,y^o(x),\bar{v}(x),p^o(x)\right)-\right.$$

$$\left.-M\left(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\right)\right]-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\frac{\partial M\left(x,y^o(x),\bar{v}(x),p^o(x)\right)}{\partial y}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial M\left(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\right)}{\partial y}\right]\Delta y(x)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_4\left(\left\|\Delta y(x)\right\|\right).$$

Если предполагать, что $\left(p^o(x),\psi^o(t,x)\right)$ является решением задачи

$$\psi^o(t-1,x)=\frac{\partial H\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)}{\partial z}, \tag{3.9}$$

$$\psi(t_1-1,x)=-\frac{\partial\varphi_2\left(x,z^o(t_1,x)\right)}{\partial z}, \tag{3.10}$$

$$p^o(x-1)=\frac{\partial M\left(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\right)}{\partial y}+\psi^o(t_0-1,x), \tag{3.11}$$

$$p^o(x_1-1)=-\frac{\partial\varphi_1\left(y^o(x_1)\right)}{\partial y}, \tag{3.12}$$

то формула приращения (3.5) примет вид

$$\Delta S\left(u^o,v^o\right)=$$

$$=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H\left(t,x,z^o(t,x),\bar{u}(t),\psi^o(t,x)\right)-H\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\right]- \tag{3.13}$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M\left(x,y^o(x),\bar{v}(x),p^o(x)\right)-M\left(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\right)\right]+\eta_1\left(u^o,v^o;\Delta u,\Delta v\right).$$

Здесь по определению

$$\eta_1\left(u^o, v^o;\ \Delta u, \Delta v\right) = o_1\left(\left\|\Delta y(x_1)\right\|\right) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_2\left(\left\|\Delta z(t_1, x)\right\|\right) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_3\left(\left\|\Delta z(t, x)\right\|\right) -$$

$$- \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4\left(\left\|\Delta y(x)\right\|\right) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\frac{\partial M\left(x, y^o(x), \bar{v}(x), p^o(x)\right)}{\partial y} -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial M\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)}{\partial y}\right]' \Delta y(x) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\frac{\partial H\left(t, x, z^o(t,x), \bar{u}(t), \psi^o(t,x)\right)}{\partial z} -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial H\left(t, x, z^o(t,x), u^o(t), \psi^o(t,x)\right)}{\partial z}\right]' \Delta z(t, x).$$

**Оценка нормы приращения вектора состояния.** Из (3.1), (3.3), соответственно, с учетом (3.2), (3.4) получаем

$$\Delta z(t+1, x) = \sum_{\tau=t_0}^{t}\left(\Delta z(\tau+1, x) - \Delta z(\tau, x)\right) + \Delta z(t_0, x) =$$

$$= \sum_{\tau=t_0}^{t}\Big[\left(f\left(\tau, x, \bar{z}(\tau,x), \bar{u}(\tau)\right) - f\left(\tau, x, z^o(\tau,x), \bar{u}(\tau)\right)\right) + \left(f\left(\tau, x, z^o(\tau,x), \bar{u}(\tau)\right) -\right. \tag{4.1}$$

$$\left. - f\left(\tau, x, z^o(\tau,x), u^o(\tau,x)\right)\right) - \Delta z(\tau, x)\Big] + \Delta z(t_0, x),$$

$$\Delta y(x+1) = \sum_{s=x_0}^{x}\left(\Delta y(s+1) - \Delta y(s)\right) = \sum_{s=x_0}^{x}\Big[\left(g\left(s, \bar{y}(s), \bar{v}(\tau, s)\right) - g\left(s, y^o(s), \bar{v}(s)\right)\right) +$$

$$+ \left(g\left(s, y^o(s), \bar{v}(s)\right) - g\left(s, y^o(s), v^o(s)\right)\right) - \Delta y(s)\Big]. \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует, что

$$\left\|\Delta y(x+1)\right\| \le L_1\sum_{s=x_0}^{x}\Delta y(s) + L_2\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\left\|g\left(s, y^o(s), \bar{v}(s)\right) - g\left(s, y^o(s), v^o(s)\right)\right\|, \tag{4.3}$$

где $L_i = const > 0$, $i = 1,2$ некоторые постоянные.

Далее аналогичным образом из (4.1) получаем, что

$$\left\|\Delta z(t, x)\right\| \le L_3\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left\|f\left(\tau, x, z^o(\tau,x), \bar{u}(\tau,x)\right) - f\left(\tau, x, z^o(\tau,x), u^o(\tau,x)\right)\right\| +$$

$$+ L_4\sum_{\tau=t_0}^{t}\left\|\Delta z(\tau, x)\right\| + L_5\left\|\Delta y(x)\right\|. \tag{4.4}$$

Здесь $L_3$, $L_4$, $L_5$ − некоторые положительные постоянные.

Применяя к неравенствам (4.3), (4.4) дискретный аналог леммы Гроноулла-Беллмана (см. напр. [3, 4]) будем иметь

$$\left\|\Delta y(x)\right\| \le L_6\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\left\|g\left(s, y^o(s), \bar{v}(s)\right) - g\left(s, y^o(s), v^o(s)\right)\right\|, \tag{4.5}$$

$$\left\|\Delta z(t,x)\right\| \le L_7 \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left\| f\left(\tau,x,z^o(\tau,x),\bar{u}(\tau)\right)- f\left(\tau,x,z^o(\tau,x),u^o(\tau)\right)\right\| + L_8\left\|\Delta y(x)\right\|. \quad (4.6)$$

Здесь $L_6$, $L_7$, $L_8$ – некоторые положительные постоянные.

Принимая во внимание (4.5) в (4.6) окончательно будем иметь

$$\left\|\Delta z(t,x)\right\| \le L_7 \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left\| f\left(\tau,x,z^o(\tau,x),\bar{u}(\tau)\right)- f\left(\tau,x,z^o(\tau,x),u^o(\tau)\right)\right\| +$$

$$+ L_9 \sum_{s=x_0}^{x_1-1}\left\| g\left(s,y^o(s),\bar{v}(s)\right)- g\left(s,y^o(s),v^o(s)\right)\right\|, \quad (4.7)$$

где $L_9 > 0$ некоторая постоянная.

Если предполагать, что вектор-функции $f(t,x,z,u)$ и $g(x,y,v)$ непрерывно дифференцируемы также по $u$ и $v$, соответственно, то по аналогии с доказательством неравенств (4.5), (4.7) доказывается справедливость следующих оценок

$$\left\|\Delta y(x)\right\| \le L_{10} \sum_{s=x_0}^{x_1-1}\left\|\Delta v(s)\right\|, \quad (4.8)$$

$$\left\|\Delta z(t,x)\right\| \le L_{11} \sum_{s=x_0}^{x_1-1}\left\|\Delta v(s)\right\| + L_{12} \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left\|\Delta u(\tau)\right\|. \quad (4.9)$$

Здесь $L_{10}$, $L_{11}$, $L_{12}$ – некоторые положительные постоянные.

**Основные результаты.** В этом пункте получены различные необходимые условия оптимальности первого порядка.

Пусть $\left(u^o(t),\, v(x)\right)$ фиксированное допустимое управление. Предположим, что множества

$$\begin{aligned} f\left(t,x,z^o(t,x),U\right) &= \left\{\alpha : \alpha = f\left(t,x,z^o(t,x),u\right),\ \ u \in U\right\}, \\ g\left(x,y^o(x),V\right) &= \left\{\beta : \beta = g\left(x,y^o(x),v\right),\ \ v \in V\right\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

выпуклы.

Тогда через $\left(\Delta u_\varepsilon(t),\, \Delta v_\varepsilon(x)\right)$ можно определить специальное приращение управления $\left(u^o(t),\, v^o(x)\right)$ в виде

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon(t) = u(t;\,\varepsilon) - u^o(t,x), \\ \Delta v_\mu(x) = v(x;\mu) - v^o(x). \end{cases} \quad (5.2)$$

Здесь $\varepsilon \in [0,1]$, $\mu \in [0,1]$ – произвольные числа, а $u(t;\varepsilon)$, $v(x;\mu)$ произвольные допустимые управляющие функции, такие, что

$$\begin{aligned} &f\left(t,x,z^o(t,x),u(t;\,\varepsilon)\right) - f\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t)\right) = \\ &= \varepsilon\left[f\left(t,x,z^o(t,x),u(t)\right) - f\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t)\right)\right], \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$
\begin{gathered}
g\left(x, y^o(x), v(x;\ \mu)\right) - g\left(x, y^o(x), v^o(x)\right) = \\
= \mu\left[g\left(x, y^o(x), v(x)\right) - g\left(t, x, y^o(x), v^o(x)\right)\right],
\end{gathered} \tag{5.4}
$$

Здесь $u(t) \in U$, $t \in T$, $v(x) \in V$, $x \in X$ произвольные допустимые управляющие функции соответствующие $u(t;\varepsilon)$ и $v(x,\mu)$, соответственно.

Через $\left(\Delta z_{\varepsilon\mu}(t,x),\ \Delta y_\mu(x)\right)$ обозначим специальное приращение вектора состояния $\left(z^o(t,x),\ y^o(x)\right)$ отвечающее приращению (5.2) управления $\left(u(t),\ v(x)\right)$.

Из оценок (4.5), (4.7) следует, что

$$
\begin{gathered}
\left\|\Delta z_{\varepsilon_\mu}(t,x)\right\| \le L_{12}\,\varepsilon + L_{13}\,\mu, \\
\left\|\Delta y_\mu(x)\right\| \le L_{14}\,\mu,
\end{gathered} \tag{5.5}
$$

где $L_{12}$, $L_{13}$, $L_{14}$ − некоторые положительные числа.

Принимая во внимание оценки (5.5), формулы (5.2), (5.3), (5.4) в (3.13) приходим к разложению

$$
\begin{gathered}
\Delta S_{\varepsilon\mu}\left(u^o, v^o\right) = S\left(u^o + \Delta u_\varepsilon, v^o + \Delta v_\mu\right) - S\left(u^o, v^o\right) = \\
= -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[H\left(t,x,z^o(t,x),u(t),\psi^o(t,x)\right) - H\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\right] - \\
- \mu \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[M\left(x, y^o(x), v(x), p^o(x)\right) - M\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\right] + o_5(\varepsilon+\mu) + o_6(\mu).
\end{gathered} \tag{5.6}
$$

При помощи разложения (5.6), используя произвольность и независимость управляющих функций $u(t)$, $v(x)$, приходим к следующему утверждению

**Теорема 5.1.** Если множества (5.2) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $\left(u^o(t),\ v^o(x)\right)$ необходимо, чтобы неравенства

$$
\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[H\left(t,x,z^o(t,x),u(t),\psi^o(t,x)\right) - H\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\right] \le 0, \tag{5.7}
$$

$$
\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[M\left(x, y^o(x), v(x), p^o(x)\right) - M\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\right] \le 0, \tag{5.8}
$$

выполнялись для всех $u(t) \in U$, $t \in T$, $v(x) \in V$, $x \in X$, соответственно.

Соотношения (5.7), (5.8) составляют аналог дискретного условия максимума Понтрягина [5-7] для рассматриваемой задачи.

Теперь предположим, что вектор-функция $f(t,x,z,u)$ $\left(g(x,y,v)\right)$ непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по $(z,u)$ $\left((y,v)\right)$, а множества $U$ и $V$ выпуклые.

Тогда специальное приращение управления $\left(u^o(t),\, v^o(x)\right)$ можно определить по формуле

$$\Delta u(t,\mu_1)=\mu_1\left[u(t)-u^o(t)\right],$$
$$\Delta v(x,\mu_2)=\mu_2\left[v(x)-v^o(x)\right]. \qquad (5.9)$$

Здесь $\mu_i\in[0,1]$, $i=1,2$ − произвольные числа, а $u(t)\in U$, $t\in T$, $v(x)\in V$, $x\in X$ − произвольные допустимые управляющие функции.

Через $\left(\Delta z(t,x;\mu_1,\mu_2),\, \Delta y(x;\mu_2)\right)$ − обозначим специальное приращение траектории $\left(z^o(t,x),\, y^o(x)\right)$, отвечающие приращению (5.9) управления $\left(u(t),\, v(x)\right)$.

Из оценок (4.8), (4.9) сразу следует, что

$$\left\|\Delta z(t,x;\mu_1,\mu_2)\right\|\le L_{15}\,\mu_1+L_{16}\,\mu_2,$$
$$\left\|\Delta y(x;\mu_2)\right\|\le L_{17}\,\mu_2.$$

С учетом этих оценок получаем справедливость разложения

$$S\left(u^o(t)+\Delta u(t;\mu_1), v^o(x)+\Delta v(x;\mu_2)\right)-S\left(u^o,v^o\right)=$$
$$=-\mu_1\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}H_u'\left(t,x,z^o(t,x),y^o(x),\psi^o(t,x)\right)\left(u(t)-u^o(t)\right)- \qquad (5.10)$$
$$-\mu_2\sum_{x=x_0}^{x_1-1}M_v'\left(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\right)\left(v(x)-v^o(x)\right)+o_7(\mu_1+\mu_2)+o_8(\mu_2).$$

При помощи разложения (5.10) доказывается

**Теорема 5.2.** Пусть множества $U$, $V$ выпуклы, а $f(t,x,z,u)$, $g(x,y,v)$ непрерывны по совокупности переменных вместе с частными производными по $(z,u)$, $(y,v)$, соответственно. Тогда для оптимальности допустимого управления $\left(u^0(t),\, v^0(x)\right)$ необходимо, чтобы соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}H_u'\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\left(u(t)-u^o(t)\right)\le 0, \qquad (5.11)$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}M\left(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\right)\left(v(x)-v^o(x)\right)\le 0, \qquad (5.12)$$

выполнялись для всех $u(t)\in U$, $t\in T$, $v(x)\in V$, $x\in X$, соответственно.

Совокупность соотношений (5.11), (5.12) есть аналог линеаризованного условия максимума [3-7] в задаче (2.1)-(2.5).

Рассмотрим случай открытых областей управления. Тогда специальное приращение допустимого управления $\left(u^o(t),\, v^o(x)\right)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_{\varepsilon_1}(t)=\varepsilon_1\,\delta u(t), \quad t\in T,$$

$$\Delta v_{\varepsilon_2}(x) = \varepsilon_2\, \delta v(x), \quad x \in X. \tag{5.13}$$

Здесь $\varepsilon_i, i = 1,2$ – произвольные достаточные малые по обсолютной величине числа, а $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T$, $\delta v(x) \in R^q, x \in X$ – произвольные ограниченные вектор-функции (вариации управляющих вектор-функций).

Через $(\Delta z_{\varepsilon_1}(t,x),\, \Delta y_{\varepsilon_2}(x))$ обозначим специальное приращение траектории $(z^0(t,x),\, y^0(x))$, отвечающее приращению $(\Delta u_{\varepsilon_1}(t),\, \Delta v_{\varepsilon_2}(x))$ управления $(u^o(t),\, v^o(x))$.

Используя (4.8), (4.9), (5.13) по аналогии с доказательством формулы (5.6), из формулы приращения (3.13) получаем, что

$$S(u^o + \varepsilon_1\, \delta u, v^o + \varepsilon_2\, \delta v) - S(u^o, v^o) =$$

$$= -\varepsilon_1 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_u'(t, x, z^o(t,x), u^o(t), \psi^o(t,x))\delta u(t) -$$

$$- \varepsilon_2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_v'(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x))\delta v(x) + o_9(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + o_{10}(\varepsilon_2).$$

Отсюда используя произвольности $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, а также вариаций $\delta u(t)$, $\delta v(x)$ приходим к следующему заключению

**Теорема 3.3.** Если множества $U$ и $V$ открыты, то для оптимальности допустимого управления $(u^o(t),\, v^o(x))$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_u(\theta, x, z^o(\theta,x), u^o(\theta), \psi^o(\theta,x)) = 0 \tag{5.14}$$

для всех $\theta \in T$,

$$M_v(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi)) = 0 \tag{5.15}$$

для всех $\xi \in X$.

Соотношения (5.14), (5.15) представляют собой аналог уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Москаленко А.И. Об одном классе задач оптимального регулирования // Журн. Вычисл. мат. и мат. физики. 1969, № 1, с. 69-95.
2. Москаленко А.И. Некоторые вопросы теории оптимального управления / Автореф. дисс. на соиск. ученой степени канд. физ. мат. наук, Томск, 1971, 20 с.
3. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: Бакы Университети, 2013, 161 с.
4. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400с.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск, 1981, 400 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: Белорусский Госуниверситет, 1973, 248 с.
7. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973, с.

## BİR DİSKRET OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

**E.A.QARAYEVA, K.B.MƏNSİMOV**

**XÜLASƏ**

Bir spesifik diskret optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər tapılmışdır (diskret maksimum prinsipi, xəttiləşdirilmiş optimallıq şərti, Eyler tənliyinin analoqu).

**Açar sözlər:** diskret sistemlər, artım düsturu, diskret maksimum prinsipi, xəttiləşdirilmiş maksimum şərti, Eyler tənliyi.

## ON ONE DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEM

**E.A.GARAYEVA, K.B.MANSIMOV**

**SUMMARY**

The paper considers one special discrete control problem. First order necessary optimality conditions are obtained (discrete maximum principle, linearized optimality conditions, analogous Euler equations).

**Key words:** discrete systems, increment formula, discrete maximum principle, linearized maximum conditions, analogous Euler equation.

*Поступило в редакцию: 20.02.2014 г.*
*Подписано к печати: 04.04.2014 г.*